Droite d'Euler d'un triangle

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Droite d'Euler d'un triangle**

Dans un triangle ABC non équilatéral et non aplati, on considère l'orthocentre H, le centre O du cercle circonscrit et le centre de gravité G.

1. *Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.*
2. *Soit $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$. Montrer que $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.*
3. *En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.*

La droite passant par ces trois points est appelé droite d'Euler *du triangle ABC.*

Solution :

1. *Comme G est l'isobarycentre de A, B et C, par la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.*
2. *On appelle I le milieu de $[AB]$. Il vient :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AB} &= \left(3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= \left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}}_{=0} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{HC} \text{ dirige la hauteur issue de } B \\
&= \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \\
&= 0 \text{ car } \overrightarrow{OI} \text{ dirige la médiatrice du segment } [AB]
\end{aligned}$$

3. *En effectuant le même calcul, on pourrait montrer que $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AC} = 0$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$. Mais le triangle ABC n'étant pas plat, ceci*

n'est possible que si $\vec{v} = \vec{0}$, c'est-à-dire seulement si $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Le triangle n'étant pas équilatéral, on en déduit que les points O, G et H sont alignés. La droite portant ces trois points est appelée **droite d'Euler** *du triangle ABC.*

Proposons une preuve calculatoire de cette propriété :

Dans un repère orthonormé adapté, les coordonnées de A, B et C sont $A\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}b\\0\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}0\\c\end{matrix}\right.$, le centre de gravité a pour coordonnées $\boxed{G\left|\begin{matrix}(a+b)/3\\c/3\end{matrix}\right.}$, les trois hauteurs ont pour équation cartésienne

$$x = 0, \quad -bx + cy + ab = 0, \quad -ax + cy + ab = 0$$

d'où le point d'intersection des hauteurs : $\boxed{H\left|\begin{matrix}0\\-ab/c\end{matrix}\right.}$. Pour trouver le centre du cercle circonscrit, on peut chercher l'intersection des médiatrices ou résoudre $\|\overrightarrow{\Omega A}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega B}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega C}\|^2$ ce qui donne $\boxed{\Omega\left|\begin{matrix}(a+b)/2\\c/2+ab/2c\end{matrix}\right.}$. On calcule ensuite

$$\det(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{H\Omega}) = \begin{vmatrix}(a+b)/3 & (a+b)/2\\ c/3+ab/c & c/2+3ab/2c\end{vmatrix} = 0$$

ce qui montre que ces trois points sont alignés.

Références