Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *et* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *la famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *admettant* A *comme matrice dans la base* e. *On a donc :*

$$f_1 = e_1 + ae_2,\ f_2 = e_2 + ae_3,\ \dots,\ f_{n-2} = e_{n-2} + ae_{n-1},\ f_{n-1} = e_{n-1} + ae_n,\ f_n = e_n.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} e_n &= f_n \\ e_{n-1} &= f_{n-1} - af_n \\ e_{n-2} &= f_{n-2} - af_{n-1} + a^2 f_n \\ \vdots &= \vdots \\ e_2 &= f_2 - af_3 + a^2 f_4 - a^3 f_5 + \dots + (-1)^{n-2} a^{n-2} f_n \\ e_1 &= f_1 - af_2 + a^2 f_3 - a^3 f_4 + \dots + (-1)^{n-1} a^{n-1} f_n \end{aligned}$$

donc f *est une base de* $\mathbb{K}^n$, A *est inversible et*

$$A^{-1} = Mat_f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^2 & -a & \ddots & & \\ -a^3 & a^2 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{n-2}a^{n-2} & (-1)^{n-3}a^{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-1}a^{n-1} & (-1)^{n-2}a^{n-2} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Références