Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On pose $M = I + A$.

1. *Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice $X^{\mathrm{T}}AX$*
2. *En déduire que la matrice M est inversible.*

Solution :

1. *Si $A = (a_{ij})$ alors $X^{\mathrm{T}}AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}xix_j$. Comme A est antisymétrique, pour tout $i \neq j$ $a_{ji}xix_j = -a_{ij}xix_j$ et $a_{ii} = 0$. Alors $\boxed{X^{\mathrm{T}}AX = 0}$.*
2. *Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors*

$$MX = 0 \Rightarrow X^{\mathrm{T}}MX = 0 \Rightarrow X^{\mathrm{T}}(I+A)X = 0 \Rightarrow X^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}AX = 0 \Rightarrow X^{\mathrm{T}}X = 0$$

en vertu de la première question. Mais si $X = (x_i)$, $X^{\mathrm{T}}X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $X^{\mathrm{T}}X = 0$ implique que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ et que $X = 0$. On en déduit que M est inversible.

Références