Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 juillet 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

Solution : *On développe suivant la première ligne et on reconnaît les formules d'addition :*

$$\Delta = \cos(a-b)\left[\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)\right] - \cos(b-c)\left[\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)\right]$$
$$\cos(c-a)\left[\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b)\right]$$
$$\cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \frac{1}{2}\left(\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a\right.$$

puis on utilise les deux formules $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ *et* $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ *:*

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(2\sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin 2(c-a)\right)$$
$$= \sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)\left(\cos(a+c-2b) - \cos(c-a)\right)$$
$$= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

Références