Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Calculer, sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ *(appelé déterminant de Vandermonde).*
6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$
7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$

où a, b, c sont trois réels.

Solution :

1. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$
$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=\!=\!=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$$
$$\boxed{(a+b+c)^3}$$
2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2abc}$ *par application de la règle de Sarrus.*

3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xlongequal{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$

$(1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} =$
$\boxed{1+a+b+c}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C1+C2+C_3} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) = \boxed{\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$\xlongequal{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3} \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} =$
$-2 \begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} -2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} =$

$\boxed{-2abc(b-a)(c-a)(c-b)}$ *car on reconnaît un déterminant de Vandermonde.*

7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & 2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & -2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} \\ 0 & 2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} & -2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \end{vmatrix} = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \cos\frac{b+a}{2} & \sin\frac{b+a}{2} \\ 0 & \cos\frac{c+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \end{vmatrix} =$
$-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\left(\sin\frac{c+a}{2}\cos\frac{b+a}{2} - \sin\frac{b+a}{2}\cos\frac{c+a}{2}\right) = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\left(\frac{c+a}{2} - \frac{b+a}{2}\right) =$

$$\boxed{-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}}$$

Références