Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$
3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
4. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
5. $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$
6. $\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 2\cos^2 x \\ 1 & -\cos 2x & 2\sin^2 x \\ \cos x \sin x & \cos x \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}$

Solution :

1. *Une colonne de Δ_1 est nulle donc $\Delta_1 = 0$.*
2. *Les deux premières colonnes de Δ_2 sont proportionnelles, donc $\Delta_2 = 0$.*
3. *La première colonne de Δ_3 est somme des deux autres donc $\Delta_3 = 0$.*
4. *Δ_4 étant diagonale, le déterminant Δ_4 est égal au produit de ces termes diagonaux. Un de ceux-ci étant nul, il en est de même de Δ_4.*
5. *$\Delta_5 \xlongequal{C_3 \to C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$ et les première et troisième colonnes de Δ_5 sont proportionnelles. Il vient $\Delta_5 = 0$.*
6. *La dernière colonne de Δ_6 est somme des deux autres donc $\Delta_6 = 0$.*

Références