Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* M^2.
2. *Déterminer le rang de* M.
3. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ *telles que* $AB = M$. *Démontrer que* $BA = 9I_2$.

Solution :

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 64+4+4 & 16+10-8 & -16+8-10 \\ 16+10-8 & 4+25+16 & -4+20+20 \\ -16+8-10 & -4+20+20 & 4+16+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} = 9M$.
2. M *est de rang 2.* $(4L_2 - L_1 = 4L_3 + L_1)$.
3. AB *est de rang 2, donc* $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$, *donc* $\mathrm{rg}(A) = 2$. *De même* $\mathrm{rg}(B) = 2$. *Donc* A *est la matrice d'une application linéaire injective.* $\exists A' \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, *telle que* $A'A = I_2$. *De même* B *est la matrice d'une application linéaire surjective.* $\exists B' \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, *telle que* $BB' = I_2$. *Comme* $ABAB = 9AB$, *on en déduit que* $A'ABABB' = 9A'ABB' = 9I_2I_2 = 9I_2$.

Références