Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer suivant la (ou les) valeur(s) du (des) paramètre(s) le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$.
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.
5. $E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Solution :

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix} \xlongequal{transpo.} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-a & -1 & 2 \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & 3-a \end{pmatrix} \xlongequal{si\ a\neq 1} 1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-a & 0 \\ 1 & 3-a \end{pmatrix} \xlongequal{transpo.}$$

$$1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 0 & 3-a \end{pmatrix} \xlongequal{si\ a\neq 2} 2+\operatorname{rg}(3-a)$$

De plus, on vérifie facilement que si $a=1$ *ou* $a=2$ *alors* $\operatorname{rg} A = 2$.*Donc* $\operatorname{rg} A = \begin{cases} 2 & \textit{si } a = 1, 2 \quad \textit{ou} \quad 3 \\ 3 & \textit{sinon} \end{cases}$.

2.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \xlongequal{transpo.} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{pmatrix} \xlongequal[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b+c & bc \\ 0 & a-b & c(a-b) \\ 0 & a-c & b(a-c) \end{pmatrix} =$$

$$1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a-b & c(a-b) \\ a-c & b(a-c) \end{pmatrix} \xlongequal{si\ a\neq b\ et\ a\neq c} 1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & si\ b \neq c \\ 2 & si\ b = c \end{cases}.$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\operatorname{rg} B = \begin{cases} 1 & \textit{si } a=b=c \\ 2 & \textit{si deux parmi les trois nombres } a, b \textit{ et } c \textit{ sont égaux et le troisième différent} \\ 3 & \textit{si } b \neq c \quad \textit{et} \quad a \neq b \quad \textit{et} \quad a \neq c \end{cases}$

3. *Si* $\theta \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \cos\theta L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \cos 2\theta L_1}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta - \cos^2\theta & \cos 3\theta - \cos\theta\cos 2\theta \\ 0 & \cos 3\theta - \cos 2\theta\cos\theta & \cos 4\theta - \cos^2 2\theta \end{pmatrix} =$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & -\sin^2\theta & -\sin 2\theta\sin\theta \\ 0 & -\sin 2\theta\sin\theta & -\sin^2 2\theta \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-\sin\theta} \\ L_3 \rightarrow \frac{L_3}{-\sin 2\theta}}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=\!=\!=\!=}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Par ailleurs si $\theta = 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, $rgC = 2$.

4.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{si\ b \neq a\ et\ c \neq a}{=\!=\!=\!=\!=\!=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=\!=\!=\!=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 0 & c-b \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}(c-b) = \begin{cases} 3 & si\ c \neq b \\ 2 & si\ c = b \end{cases}$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\operatorname{rg} D = \begin{cases} 1 & \textit{si } a=b=c \\ 2 & \textit{si deux parmi les trois nombres } a, b \textit{ et } c \textit{ sont égaux et le troisième différent} \\ 3 & \textit{si } b \neq c \quad \textit{et} \quad a \neq b \quad \textit{et} \quad a \neq c \end{cases}$.

5. *Supposant* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{L_5 \leftarrow aL_5 - bL_1}{=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & -b^2 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \overset{L_5 \leftarrow aL_5 + b^2L_2}{=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b^3 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_5 \leftarrow aL_5 - b^3L_3}{=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b^4 & a^4 \end{pmatrix} \overset{L_5 \leftarrow aL_5 + b^4L_4}{=\!=\!=\!=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^5+a^5 \end{pmatrix} = \begin{cases} 5 & si\ a^5+b^5 \neq 0 \\ 4 & si\ a^5+b^5 = 0 \end{cases}$$

En résumé, (et dans le cas où a et b sont réels) : $\operatorname{rg}(E) = 0$ *si a et b sont non nuls.* $\operatorname{rg}(E) = 5$ *si a ou b est nul mais pas en même temps.* $\operatorname{rg} E = 4$ *si $a = 1$ et $b = -1$ ou si $a = -1$ et $b = 1$. Dans tous les autres cas* $\operatorname{rg}(E) = 5$.

Références