Centre du cercle inscrit à un triangles et bissectrices

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Centre du cercle inscrit à un triangles et bissectrices***

Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Montrer que les trois bissectrices intérieures du triangle ABC sont concourantes en un point K du plan et ce que ce point est centre du cercle inscrit à ABC (c'est-à-dire le cercle tangent aux trois côtés du triangle).

Solution : *Notons d_A, d_B et d_C les bissectrices intérieures de ABC issues respectivement de A, B et C. Les points A, B et C n'étant pas alignés, d_A et d_B ne sont pas parallèles et se coupent en un point K du plan. Par définition d'une bissectrice, on a : $d(K,(AB)) = d(K,(AC)) = d(K,(AB)) = d(K,(BC))$. Par conséquent, $d(K,(CA)) = d(K,(CB))$ et K est élément de la bissectrice issue de C. On en déduit que les trois bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en K. Notons K_A, K_B, K_C les projetés orthogonaux de K sur respectivement (BC), (AC) et (AB), on a : $d(K,(AB)) = KK_C$, $d(K,(AC)) = KK_B$ et $d(K,(BC)) = KK_A$. D'après ce qui a été fait précédemment, on peut affirmer que ces trois longueurs sont égales : $KK_A = KK_B = KK_C$. Le point K est donc le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $K_AK_BK_C$. Il reste à montrer que les trois côtés du triangles ABC sont tangents à ce cercle. Comme K_A est le projeté orthogonal de K sur (BC), la droite (BC) est perpendiculaire à un rayon du cercle $\mathscr{C}$ et est donc tangente à $\mathscr{C}$. On fait de même avec les droites (AC) et (AB) et on montre que $\mathscr{C}$ est bien le cercle inscrit à ABC.*

Références