Un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées***

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$$

1. *Calculer $< A, B >$ en fonction des coefficients de A et B.*
2. *Vérifier que $< A, B >=< B, A >$*
3. *On note $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$. Montrer que $\|A\| = 0 \iff A = 0$.*
4. *Montrer que $A \mapsto < A, B >$ et $B \mapsto < A, B >$ sont des formes linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*
5. *Montrer que $|< A, B >| \leqslant \|A\| \, \|B\|$.*

On a prouvé que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, voir le chapitre **??**. *L'inégalité prouvée dans la dernière question n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz. Voir le théorème* **??** *page* **??**.

Solution :

1. *On utilise la formule du produit matriciel. Si $A = (a_{ij})$ et si $B = (b_{ij})$ Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,*

   $\left[AB^{\mathrm{T}}\right]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$ *donc* $\boxed{< A, B >= \mathrm{Tr}\left(AB^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}}$.
2. *C'est évident d'après la formule précédente.*
3. *On utilise à nouveau la formule précédente : $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. Le résultat en découle immédiatement.*
4. *On montre facilement la linéarité de $A \mapsto < A, B >$ en utilisant la linéarité de Tr. D'après la question 2., $B \mapsto < A, B >$ est aussi linéaire.*
5. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$0 \leqslant \|A + tB\|^2 =< A + tB, A + tB >= \|B\|^2 t^2 + 2 < A, B > t + \|A\|^2 .$$

On obtient ainsi un trinôme du second degré en t. Son discriminant est $\Delta =< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2$. Comme ce trinôme est positif, il admet au plus une racine réelle et donc $\Delta \leqslant 0$. On en déduit que $< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \leqslant 0$ et donc que $|< A, B >| \leqslant \|A\| \|B\|$.

Références