Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver toutes les formes linéaires φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

Solution : *Soit φ une telle forme linéaire. Avec des matrices élémentaires, il vient pour tout $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}) = 0$ soit $\varphi(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{\ell i}E_{kj}) = 0$. Si $j = k$ et $i \neq \ell$ il s'ensuit que $\varphi(E_{i\ell}) = 0$. Et si $j = k$ et $i = \ell$ alors $\varphi(E_{ii} - E_{jj}) = 0$. Donc φ est nulle sur tous les vecteurs $E_{i\ell}$ de la base canonique tel que $i \neq \ell$ et constante sur ceux tels que $i = \ell$. On en déduit que pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\varphi(A) = \gamma \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \gamma \operatorname{Tr}(A)$ où $\gamma = \varphi(E_{11})$. Donc $\varphi \in \operatorname{Vect}(\operatorname{Tr})$. Réciproquement, si φ est proportionnelle à la trace, alors φ vérifie $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$.*

Références