Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On se donne deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*. Trouver toutes les matrices* $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$X + \operatorname{Tr}(X)A = B.$$

Indication 0.0 : *Si* X *est une solution, prendre la trace de l'équation puis discuter.*

Solution : *Soit une matrice* $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *solution. Alors* $\operatorname{Tr}(X) + \operatorname{Tr}(X)\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$*. Il faut étudier deux cas :*

1. *Si* $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$*, alors* $\operatorname{Tr}(X) = \dfrac{\operatorname{Tr}(B)}{1+\operatorname{Tr}(A)}$ *et alors* $X = B - \dfrac{\operatorname{Tr}(B)}{1+\operatorname{Tr}(A)}A$*. Réciproquement, on vérifie que cette matrice convient.*
2. *Si* $\operatorname{Tr}(A) = -1$*, alors en prenant la trace dans l'égalité* $X + \operatorname{Tr}(X)A = B$ *on déduit* $\operatorname{Tr}(X) + \operatorname{Tr}(X)\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$ *soit* $\operatorname{Tr}(B) = 0$*. Donc si* $\operatorname{Tr}(B) \neq 0$*, il n'y a pas de solution.*
   Réciproquement, si on suppose $\operatorname{Tr}(B) = 0$*, alors en posant* $X = B + \lambda A$*, on a bien* $\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} B + \lambda \operatorname{Tr} A = -\lambda$*, et par conséquent* $X + \operatorname{Tr}(X)A = X - \lambda A = B + \lambda A - \lambda A = B$*.*
   Dans le cas où $\operatorname{Tr}(A) = -1$ *et* $\operatorname{Tr}(B) = 0$*, l'ensemble des solutions est* $\mathcal{S} = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}$*.*

Conclusion : Si $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$*,* $\mathcal{S} = \left\{B - \dfrac{\operatorname{Tr}(B)}{1+\operatorname{Tr}(A)}A\right\}$*. Si* $\operatorname{Tr}(A) = -1$ *et* $\operatorname{Tr}(B) \neq 0$*,* $\mathcal{S} = \varnothing$*. Si* $\operatorname{Tr}(A) = -1$ *et* $\operatorname{Tr}(B) = 0$*, alors* $\mathcal{S} = \{B + \lambda A ; \lambda \in \mathbb{R}\}$*.*

Références