

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = B$.

Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(B^k) = 0$.

Solution : On démontre par récurrence : $H_k : AB^k - B^kA = kB^k$. On a H_1 par hypothèse. D'autre part

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) = kB^k B + B^k B = (k+1)B^{k+1}.$$

En prenant la trace, on obtient le résultat.

Références