Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_2\left(()\,\mathbb{R}\right)$, et $C = AB$.

1. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de C.*
2. *On pose :* $S_1 = a_{2,1} - a_{1,1};\ S_2 = a_{1,1} + a_{1,2};\ S_3 = a_{1,2} - S_1;\ S_4 = a_{2,2} - S_3;\ S_5 = b_{2,2} - b_{1,2};\ S_6 = b_{1,2} - b_{1,1};\ S_7 = b_{1,1} + S_5;\ S_8 = b_{2,1} - S_7.$
   $P_1 = a_{2,1}b_{1,1};\ P_2 = a_{2,2}b_{2,1};\ P_3 = S_1S_5;\ P_4 = S_2S_6;\ P_5 = S_4b_{2,2};\ P_6 = a_{1,2}S_8;\ P_7 = S_3S_7$. *Enfin* $S_9 = P_1 + P_7;\ S_{10} = S_9 + P_3;\ S_{11} = P_4 + P_5.$
   Démontrer que $c_{1,1} = S_{10} + P_6;\ c_{1,2} = S_{10} + P_4;\ c_{2,1} = P_1 + P_2;\ c_{2,2} = S_9 + S_{11}.$
3. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de C par cette nouvelle méthode.*

Solution :

1. *Il y a 4 coefficients à calculer. Pour chacun d'eux il y a deux multiplications et une addition. Soit 8 multiplications et 4 additions.*
2. $S_{10} + P_6 = S_9 + P_3 + a_{1,2}S_8 = P_1 + P_7 + S_1S_5 + a_{1,2}(b_{2,1} - S_7) = a_{2,1}b_{1,1} + S_3S_7 + (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{2,2} - b_{1,2}) + a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,2}(b_{1,1} + S_5) = a_{2,1}b_{1,1} + (a_{1,2} - S_1)(b_{1,1} + S_5) + a_{2,1}b_{2,2} - a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,2}b_{1,1} - a_{1,2}(b_{2,2} - b_{1,2}) = a_{2,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,1} + a_{1,2}(b_{2,2} - b_{1,2}) - (a_{2,1} - a_{1,1})b_{1,1} - (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{2,2} - b_{1,2}) + a_{2,1}b_{2,2} - a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,2}b_{1,1} - a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,2}b_{1,2} = a_{2,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,2} - a_{1,2}b_{1,2} - a_{2,1}b_{1,1} + a_{1,1}b_{1,1} - a_{2,1}b_{2,2} + a_{2,1}b_{1,2} + a_{1,1}b_{2,2} - a_{1,1}b_{1,2} + a_{2,1}b_{2,2} - a_{2,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,2}b_{1,1} - a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,2}b_{1,2} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,1}b_{2,2} - a_{1,1}b_{1,2} - a_{1,1}b_{2,2} + a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,2} - a_{1,2}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,2}b_{1,1} - a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{2,1}b_{1,1} - a_{2,1}b_{1,1} - a_{2,1}b_{2,2} + a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,1}b_{2,2} - a_{2,1}b_{1,2} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + 0 = c_{1,1}$. *Les trois autres calculs sont tout aussi jubilatoires.*
3. *Il y a 7 multiplications et 11 additions. Le deuxième algorithme est plus rapide dès qu'une addition est 7 fois plus rapide qu'une addition. Dans ce cas on constate que le gain en rapidité est au détriment de la place mémoire utilisée.*

Références