

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Déterminer toutes les formes linéaires φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(AB) = \varphi(BA^T)$$

Solution : Remarque : Si $n = 1$, alors toutes les formes linéaires conviennent.

On prend $n > 1$. Une forme linéaire est définie par ses images des vecteurs d'une base, donc ici les $\varphi(E_{i,k})$.

Or $E_{i,k} = E_{i,j}E_{j,k}$ donc en choisissant $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,k}$ avec $k \neq j$ (c'est possible puisque $n > 1$) on a $BA^T = E_{j,k}E_{j,i} = 0$. Donc $\varphi(E_{i,k}) = 0$ et φ est la forme nulle.

Références