Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 **★★** ***Pas de titre***

Soit deux matrices colonnes non nulles $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la matrice XY^{T} est de rang 1.*
2. *Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire sous la forme ci-dessus.*
3. *Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$A^2 = \lambda A$$

et exprimer λ en fonction de X et Y.

Solution :

1. *Le rang de X et de Y^{T} égale 1 donc le rang du produit est $\leqslant 1$. Par exemple parce que toutes les lignes (ou les colonnes) sont proportionnelles, ou bien parce que si u et v sont deux applications linéaires, $u \circ v$ (si elle existe) a un rang inférieur au rang de u. Le rang de XY^{T} n'est pas 0 manifestement.*
2. *Comme $A \neq 0$, on choisit un élément $a_{ij} \neq 0$. Comme A est de rang 1, toutes les lignes sont proportionnelles à la i-ème ligne : $L_k = \alpha_k L_i$. Donc on peut prendre $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ et $Y = (a_{i1}, \dots, a_{in})$.*
3. *On écrit $A = XY^{\mathrm{T}}$, d'où $A^2 = AA = XY^{\mathrm{T}}XY^{\mathrm{T}}$. Comme $Y^{\mathrm{T}}X$ est un réel, il commute à X. Donc $AA = (Y^{\mathrm{T}}X)XY^{\mathrm{T}} = (Y^{\mathrm{T}}X)A$. On peut donc prendre $\lambda = Y^{\mathrm{T}}X$.*

Références