Centre de gravité et médianes d'un triangle

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Centre de gravité et médianes d'un triangle***

Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Soient G l'isobarycentre de ABC.

1. *Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. En déduire que G est élément de la médiane de ABC issue de A.*
2. *En déduire que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G.*

Solution :

1. *Comme G est l'isobarycentre de ABC, on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Utilisant la relation de Chasles, on en tire : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{0}$ d'où la relation annoncée. La médiane issue de A étant la droite (AI), il est alors clair que G est élément de cette médiane.*
2. *On démontrerait de même que, si J désigne le milieu de $[AC]$ et K celui de $[AB]$: $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. Le point G appartient donc à la médiane de ABC issue de B et celle issue de C. Les trois médianes de ABC sont donc concourantes en G.*

Références