Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad ACB = 0$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Solution : *On traduit l'énoncé avec des endomorphismes : Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\forall w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $u \circ w \circ v = 0$. Démonter que $u = 0$ ou $v = 0$.*
Par contraposée : Supposons $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Donc $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $z = v(x) \neq 0$ et $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $u(y) \neq 0$. On construit alors $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $w(z) = y$. On a alors $(u \circ w \circ v)(x) = u(y) \neq 0$. Donc $u \circ w \circ v \neq 0$.

Références