Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On définit pour $i \neq j$, la matrice $T_{ij}^{\lambda} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$T_{ij}^{\lambda} = I + \lambda E_{i,j}$$

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer AT_{ij}^{λ} et $T_{ij}^{\lambda}A$. Interpréter le résultat trouvé.

Solution : *Soit e_i les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $T_{ij}^{\lambda}e_k = e_k$ pour $k \neq i$ et $T_{ij}^{\lambda}e_j = e_j + \lambda e_i$. On en déduit que la k-ième colonne de la matrice de AT_{ij}^{λ} est $AT_{ij}^{\lambda}e_k = Ae_k$ pour $k \neq i$ et $AT_{ij}^{\lambda}e_j = Ae_j + \lambda Ae_i$. Moralité : la matrice AT_{ij}^{λ} est obtenue en ajoutant λ fois la i-ème colonne de A à sa j-ème colonne.*
De même (par exemple en transposant) la matrice $T_{ij}^{\lambda}A$ est obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à sa i-ème ligne.
Moralité : *Lorsqu'on multiplie à gauche (par une matrice T_{ij}^{λ}) on agit sur les lignes. Quelle action ? Il suffit de le voir sur la matrice I_n.*

Références