Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ \mathbb{O} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $J^{\mathrm{T}}J$, *et* JJ^{T}.

Solution : *On considère* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *défini par* $u(e_1) = 0$ *et* $u(e_i) = e_{i-1}$ *pour* $i \geqslant 2$. J *est la matrice de* u *dans* $\mathcal{B}$. J^{T} *est la matrice de* v *dans* $\mathcal{B}$, *avec* $v(e_i) = e_{i+1}$ *pour* $i \leqslant n-1$ *et* $v(e_n) = 0$. $J^{\mathrm{T}}J$ *est la matrice de* $v \circ u$ *dans* $\mathcal{B}$. *On a* $v \circ u(e_1) = 0$ *et* $v \circ u(e_i) = v(e_{i-1}) = e_i$. *Donc*

$$J^{\mathrm{T}}J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{de même} \qquad JJ^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Références