Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Solution : *Soit $C = AB$, où $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ sont deux matrices carrées symétriques. On a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}a_{k,i} = c'_{j,i}$ avec $C' = BA$. Donc $c_{i,j} = c_{j,i}$ si et seulement si $C = C'$ c'est-à-dire lorsque A et B commutent.*
Plus synthétiquement : $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$ car $A = A^{\mathrm{T}}$ et $B = B^{\mathrm{T}}$. Donc $(AB)^{\mathrm{T}} = AB$ si et seulement si $AB = BA$.

Références