Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 mars 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une matrice $A = ((a_{i,j})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et deux indices* $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. *Déterminer les matrices* $AE_{k,l}$ *et* $E_{k,l}A$.
2. *Trouver toutes les matrices* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant :* $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA$.

Solution :

1. *On sait que* $A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{i,j} E_{ij}$ *donc*

$$AE_{k,l} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{i,j} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{i,j} \delta_{j,k} E_{i,l} = \sum_{i=1\dots n} a_{i,k} E_{i,l}$$

$$E_{k,l}A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{i,j} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{i,j} \delta_{l,i} E_{k,j} = \sum_{j=1\dots n} a_{l,j} E_{k,j}$$

2. *Si pour tout* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, *alors en particulier, pour tout* $k,l \in [\![1,n]\!]$, $E_{k,l}A = AE_{l,k}$ *et donc* $\sum_{i=1\dots n} a_{i,k} E_{i,l} = \sum_{j=1\dots n} a_{l,j} E_{k,j}$. *Mais la famille* $(E_{i,j})$ *est libre donc cette égalité n'a lieu que si* $a_{i,k} = 0$ *pour* $i \neq k$ *et si* $a_{i,i} = a_{j,j}$ *pour tout* $i,j \in [\![1,n]\!]$, *autrement dit que si* A *est scalaire. Réciproquement, si* A *est scalaire alors elle commute avec toutes les matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Références