Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ et $E_{i,j}$, $E_{k,l}$ les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ correspondantes. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.*
2. *Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A commute avec toutes les matrices diagonales. Montrer que A est une matrice diagonale.*
3. *Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$*
2. *Notons $A = ((a_{i,j}))$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme A commute avec la matrice $E_{k,k}$, on a*

$$AE_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}$$

et

$$E_{k,k}A = a_{i,j}E_{i,j}E_{k,k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{k,k}E_{i,j}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}E_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}E_{k,j},$$

Ceci pour tout indice k.

Comme le membre de gauche est une matrice nulle sauf peut-être sur la k-ième colonne et le membre de droite, une matrice nulle sauf peut-être sur la k-ième ligne. On en déduit que pour $i \neq k$, $a_{i,k} = 0$ et donc que A est une matrice diagonale. La réciproque est claire.

3. *Soit une matrice $A = ((a_{i,j}))$ qui commute avec toutes les matrices symétriques. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La matrice $E_{k,k}$ est symétrique, et on calcule*

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}E_{k,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}E_{i,k}$$

$$E_{kk}A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E_{k,k}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\delta_{k,i}E_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}E_{k,j}$$

Par conséquent, les coefficients de la matrice $AE_{k,k}$ sont nuls, sauf sur la k-ième colonne où ce sont les coefficients de la k-ième colonne de la matrice A. De même, les coefficients de la matrice $E_{kk}A$ sont tous nuls sauf sur la k-ième ligne, où l'on retrouve les coefficients de la matrice A. Puisque $AE_{k,k} = E_{k,k}A$, on en déduit que $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq k \Rightarrow a_{i,k} = a_{k,i} = 0_{\mathbb{K}}$. La matrice A est donc nécessairement une matrice diagonale : $A = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{i,i}$. Considérons ensuite pour $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq \ell$, la matrice symétrique $S = E_{k,\ell} + E_{\ell,k}$. On calcule

$$AS = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{i,i}E_{k,\ell} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{i,i}E_{\ell,k} = d_k E_{k,\ell} + d_\ell E_{\ell,k}$$

$$SA = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{k,\ell}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{\ell,k}E_{i,i} = d_\ell E_{k,\ell} + d_k E_{\ell,k}$$

Puisque le système $(E_{k,\ell}, E_{\ell,k})$ est libre, on trouve que $d_\ell = d_k$. En définitive, la matrice A doit être une matrice scalaire : $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha I_n$. Réciproquement, une matrice scalaire commute avec toute matrice, donc avec toute matrice symétrique.

Références