Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **_Pas de titre_**

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer :* AB *et* BA.
2. *Calculer :* $(AB)^{\mathrm{T}}$ *et* B^{T}, A^{T} *et* $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
3. *Calculer :* $\mathrm{Tr}\,(A)$, $\mathrm{Tr}\,(B)$, $\mathrm{Tr}\,(AB)$ *et* $\mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. *Développer :*$(A+B)^2$.

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *On remarque que* $AB \neq BA$.
2. $(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et*
   $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (AB)^{\mathrm{T}}$.
3. $\mathrm{Tr}\,(A) = 1$, $\mathrm{Tr}\,(B) = 3$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2$ *et* $\mathrm{Tr}\,(BA) = 2$. *On a bien :* $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$
4. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ *car* $AB \neq BA$. *De manière plus générale, la formule du binôme ne s'applique pour développer* $(A+B)^n$ *que si* A *et* B *commutent.*

Références