Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Déterminer dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes P satisfaisant à $\quad n(n-1)P-(X^2-1)P" = 0. \quad (n \geqslant 2)$.

1. *Montrer que P est nécessairement nul ou de degré n.*
2. *Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.*
3. *Démontrer que P est un polynôme de même parité que n. En déduire la nullité de certains coefficients de P.*
4. *Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P, déterminer P et montrer que :*

$$1+\sum_{2\leqslant 2q\leqslant n}(-1)^q\frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}=0.$$

Solution :

1. *Supposons que P est une solution non nulle et soit λX^k son terme dominant. Comme les termes dominants de $n(n-1)P$ et de $(X^2-1)P"$ sont égaux, on en déduit que $\lambda n(n-1) = \lambda k(k-1)$ d'où $n^2-n = k^2-k$ soit $(n-k)(n+k-1) = 0$ d'où $n = k$ ce qu'il fallait vérifier.*
2. *L'ensemble des solutions est le noyau de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\varphi(P) = n(n-1)P-(X^2-1)P"$. D'après la question précédente, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\deg(\varphi(X^k)) = k$. Donc la famille $(\varphi(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une famille échelonnée en degrés. Elle engendre donc un un espace vectoriel de dimension $n-1$. Donc la dimension de l'image de φ est supérieure ou égale à $n-1$. De plus si $\deg P = n$, alors $\deg(\varphi(P)) \leqslant n-1$. Donc $Im(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et la dimension du noyau de φ est donc égale à 1.*
3. *Il est clair que si P est solution non nulle, alors $Q = P(-X)$ est aussi solution, de même degré n. $Q-(-1)^nP$ appartient donc aussi à $\operatorname{Ker}\varphi$. Comme son degré est $< n$, c'est le polynôme nul. Ce qu'il fallait vérifier.*

   On en déduit qu'en posant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ on a $a_{n-(2q+1)} = 0$.

4. *En posant* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *on a* $P'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k$ *et* $XP'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k X^k$. *Pour* $k = 0, \ldots, n-2$, *le coefficient de degré* k *du polynôme* $n(n-1)P - (X^2-1)P$" *est nul,*
donc $n(n-1)a_k - k(k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$, *donc* $a_k = \dfrac{(k+2)(k+1)}{k(k-1)-n(n-1)}a_{k+2} = -\dfrac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n-k+1)}a_{k+2}$. *En posant* $k = n-2q$, $a_{n-2q} = -\dfrac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}a_{n-2(q-1)}$,
d'où

$$a_{n-2q} = (-1)^q \underbrace{\frac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}}_{q} \times \underbrace{\frac{(n-2q+4)(n-2q+3)}{(2q-2)(2n-2q+1)}}_{q-1} \times \ldots \times \underbrace{\frac{n(n-1)}{2(2n-3)}}_{q=1} a_n.$$

Et donc

$$a_{n-2q} = (-1)^q a_n \frac{n!}{(n-2q)! \times 2 \times \ldots \times 2q \times (2n-2q-1) \times \ldots \times (2n-3)}.$$

Soit $a_{n-2q} = (-1)^q a_n \dfrac{n!}{(n-2q)!2^q q! \times (2n-2q-1) \times \ldots \times (2n-3)}$. *On écrit au numérateur les* q *facteurs pairs qui manquent pour avoir le produit de* $2n-2q-1$ *à* $2n-2$ *au dénominateur :*

$$a_{n-2q} = (-1)^q a_n \binom{n}{2q} \frac{(2q)! \times (2n-2q) \times (2n-2q+2) \ldots \times (2n-4) \times (2n-2)}{2^q q! \times (2n-2q-1) \times (2n-2q) \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-2)}.$$

Comme $(2n-2q-1) \times (2n-2q) \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-2) = \dfrac{(2n-2)!}{(2n-2q-2)!}$,

$$\begin{aligned} a_{n-2q} &= (-1)^q a_n \binom{n}{2q} \frac{(2q)! 2^q (n-q)(n-q+1) \times \ldots \times (n-1)(2n-2q-2)!}{2^q q! (2n-2)!} \\ &= (-1)^q a_n \binom{n}{2q} \frac{(n-1)!}{q!(n-q-1)!} \frac{(2q)!(2n-2q-2)!}{(2n-2)!} = (-1)^q a_n \frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité traduit le fait que $P(1) = 0$ *pour une solution* P *non nulle.*

Références