Centre du cercle circonscrit d'un triangle et médiatrices

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Centre du cercle circonscrit d'un triangle et médiatrices***

Soient A, B, C trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Montrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes en un point O centre du cercle circonscrit au triangle :

1. *En utilisant la définition et les propriétés de la médiatrice d'un segment.*
2. *En effectuant des calculs dans un repère bien choisi.*

Solution :

1. *La médiatrice du segment $[AB]$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, celle du segment $[AC]$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. Les points ABC étant non alignés, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc ces deux médiatrices ne peuvent être parallèles. Elles se coupent alors en un point qu'on notera O. On a : $OA = OB = OC$. On déduit de ces égalités que O est le centre du cercle circonscrit à ABC et que O est élément de la médiatrice de $[BC]$. Par conséquent, les trois médiatrices du triangles sont concourantes en O.*
2. *On peut aussi proposer la solution calculatoire suivante. On peut choisir un bon repère orthonormé dans lequel les coordonnées de A, B et C sont $A\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}b\\0\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}0\\c\end{matrix}\right.$. Les milieux des côtés du triangle ont pour coordonnées, $A'\left|\begin{matrix}b/2\\c/2\end{matrix}\right.$, $B'\left|\begin{matrix}a/2\\c/2\end{matrix}\right.$, $C'\left|\begin{matrix}(a+b)/2\\0\end{matrix}\right.$. Les perpendiculaires issues respectivement de C', B' et A' ont pour équations cartésiennes :*

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad -ax + cy + \frac{a^2-c^2}{2} = 0, \quad -bx + cy + \frac{b^2-c^2}{2} = 0$$

et on vérifie qu'elles passent par le point $\boxed{I\left|\begin{matrix}(a+b)/2\\c/2+ab/2c\end{matrix}\right.}$.

Références