Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

1. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que* Δ *est bien définie puis que c'est une application linéaire.*

   (b) *Déterminer le noyau de* Δ.

   (c) *En déduire que* Δ *est surjective.*

2. *On considère maintenant* $E = \mathbb{C}[X]$ *et*

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que* Δ *est un endomorphisme de* E.

   (b) *Déterminer* $\operatorname{Im} \Delta$.

   (c) *Soient* $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que :*

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

   (d) *En déduire que si* $\deg P < n$ *alors on a :* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$.

Solution :

1. (a) *Soit* $P = a_{n+1}X^{n+1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$. *Montrons que* $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. *On a :*

$$\begin{aligned} \Delta(P) = & \Big(a_{n+1}(X+1)^{n+1} + a_n(X+1)^n + \cdots + a_1(X+1) + a_0\Big) - \Big(a_{n+1}X^{n+1} + a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \\ = & \left(a_{n+1}X^{n+1} + \underbrace{\cdots}_{\text{termes de degré} \leqslant n}\right) - \left(a_{n+1}X^{n+1} + \underbrace{\cdots}_{\text{termes de degré} \leqslant n} \right. \end{aligned}$$

donc $\deg \Delta(P) \leqslant n$ et $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Par ailleurs, si $P, Q \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) - (\alpha P + \beta Q)(X) \\
&= \alpha (P(X+1) - P(X)) + \beta (Q(X+1) - Q(X)) \\
&= \alpha \Delta(P) + \beta \Delta(Q)
\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire.

(b) Soit $m \geqslant 1$ et soit $P = a_m X^m + \cdots + a_0$ un polynôme de degré $m \in C_{n+1}[X]$ avec $m \leqslant n+1$. On a donc : $a_m \neq 0$. Supposons que $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. Alors P vérifie $P(X+1) = P(X)$ ce qui amène :

$$a_m (X+1)^m + \cdots + a_0 = a_m X^m + \cdots + a_0.$$

Le coefficient du terme de degré $m-1$ de $P(X+1)$ est $m a_m + a_{m-1}$ et celui de P est a_{m-1}. Les deux polynômes étant égaux, il en est de même de leurs coefficients, ce qui amène $m = 0$ car $a_m \neq 0$. On en déduit que P est un polynôme constant. Réciproquement, on vérifie que tout polynôme constant est élément du noyau de Δ et donc $\boxed{\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]}$.

(c) D'après la formule du rang, $\dim \operatorname{Im} \Delta = n+1$ et comme $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$, il vient $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{C}_n[X]$. Δ est donc surjective.

2. (a) On montre de la même façon que précédemment que Δ est un endomorphisme.

(b) Montrons que Δ est surjective. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n = \deg P$. Par application de la partie précédente, $\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[X]} : \mathbb{C}_{n+1}[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ est surjective. Comme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ il existe $Q \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$. On en déduit que Δ est surjective et que $\boxed{\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{C}[X]}$.

(c) Introduisons l'application $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array} \right.$. On vérifie facilement que δ est un endomorphisme de E et que $\Delta = \delta - \mathrm{id}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta^k(P(X)) = P(X+k)$. Comme les endomorphismes δ et id commutent, la formule du binôme donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^n = (\delta - \mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \delta^k$$

donc pour tout $P \in E$:

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(X+k).$$

3. Remarquons que pour tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, $\deg \Delta(P) = \deg \Delta(P) - 1$. On en déduit que si $\deg P < n$ alors $\Delta^n(P) = 0$ et en utilisant la relation établie dans la question précédente, on obtient : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0}$

Références