Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit $A = X^3 + X^2 + X + 1$ *et* $E = \mathbb{R}_n[X]$. *Considérons l'application*

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r(P) \end{array} \right.$$

où $r(P)$ *désigne le reste de la division euclidienne de* P *par* A.

1. *Montrer que* r *est bien définie et que* $r \in \mathfrak{L}(E)$..
2. *Prouver que* $r^2 = r$. *Qu'en déduisez vous ?*
3. *Déterminer l'image et le noyau de* r.

Solution :

1. *Soit* $P \in E$. *Par application du théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple* $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $P = AQ + R$ *et* $\deg R < 3$. *On a donc* $r(P) = R$ *et* r *est bien définie. Si on considère un autre polynôme* $\widetilde{P} \in E$, *il existe un couple* $\left(\widetilde{Q}, \widetilde{R}\right) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $\widetilde{P} = A\widetilde{Q} + \widetilde{R}$ *et* $\deg \widetilde{R} < 3$. *De plus, pour tout* $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$:

$$\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P} = A\left(\alpha Q + \widetilde{\alpha}\widetilde{Q}\right) + \left(\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}\right)$$

et $\deg\left(\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}\right) < 3$. *Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de* $\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P}$ *par* A *est* $\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}$. *On prouve ainsi que* $r\left(\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P}\right) = \alpha r(P) + \widetilde{\alpha} r\left(\widetilde{P}\right)$ *et donc* $r \in \mathfrak{L}(E)$.

2. *Avec les notations de la question précédente,* $r(P) = R$ *avec* $\deg R < 3$. *Donc* $R = 0A + R$ *et par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne,* $r(R) = R$. *On prouve ainsi que* $r^2 = r$. r *est donc un projecteur.*
3. *Il est clair que le noyau de* r *est l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui sont divisibles par* A. *Il est aussi clair que* $\operatorname{Im} r \subset \mathbb{R}_2[X]$. *Mais si* $P \in \mathbb{R}_2[X]$ *alors* $r(P) = P$ *donc on a aussi :* $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} r$ *et donc* $\operatorname{Im} r = \mathbb{R}_2[X]$.

Références