Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons l'application

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r(P) \end{array} \right.$$

où $r(P)$ désigne le reste de la division euclidienne de P par A.

1. *Montrer que r est bien définie et que $r \in \mathfrak{L}(E)$..*
2. *Prouver que $r^2 = r$. Qu'en déduisez vous ?*
3. *Déterminer l'image et le noyau de r.*

Solution :

1. *Soit $P \in E$. Par application du théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = AQ + R$ et $\deg R < 3$. On a donc $r(P) = R$ et r est bien définie. Si on considère un autre polynôme $\widetilde{P} \in E$, il existe un couple $\left(\widetilde{Q}, \widetilde{R}\right) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $\widetilde{P} = A\widetilde{Q} + \widetilde{R}$ et $\deg \widetilde{R} < 3$. De plus, pour tout $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}$:*

$$\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P} = A\left(\alpha Q + \widetilde{\alpha}\widetilde{Q}\right) + \left(\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}\right)$$

   et $\deg\left(\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}\right) < 3$. Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de $\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P}$ par A est $\alpha R + \widetilde{\alpha}\widetilde{R}$. On prouve ainsi que $r\left(\alpha P + \widetilde{\alpha}\widetilde{P}\right) = \alpha r(P) + \widetilde{\alpha} r\left(\widetilde{P}\right)$ et donc $r \in \mathfrak{L}(E)$.

2. *Avec les notations de la question précédente, $r(P) = R$ avec $\deg R < 3$. Donc $R = 0A + R$ et par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne, $r(R) = R$. On prouve ainsi que $r^2 = r$. r est donc un projecteur.*
3. *Il est clair que le noyau de r est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont divisibles par A. Il est aussi clair que $\operatorname{Im} r \subset \mathbb{R}_2[X]$. Mais si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $r(P) = P$ donc on a aussi : $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} r$ et donc $\operatorname{Im} r = \mathbb{R}_2[X]$.*

Références