# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Soit l'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array} \right.$$

*Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.*

***Solution :*** *On montre facilement que $\varphi$ est linéaire. Soit un polynôme $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Si $P \neq 0$, on peut écrire $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Alors $P = XP'$ d'où $a_n X^n + \cdots = n a_n X^n + \ldots$. En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que $a_n(1-n) = 0$. Donc, puisque $a_n \neq 0$, $n = 1$. Mais si $n = 1$, $P = aX + b$ et alors $P = XP' \Rightarrow b = 0$. Donc $P = aX$. Réciproquement, si $P = aX$, ($a \in \mathbb{R}$), on a bien $P = XP'$. En conclusion, $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X)}$.*

*Déterminons $\operatorname{Im}\varphi$. Soit $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \operatorname{Im}\varphi$. Alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - XP' = Q$. En examinant les degrés, il faut que $\deg P = n$. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On doit donc avoir $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(1-k)a_k = b_k$. Une condition nécessaire pour que $Q \in \operatorname{Im}\varphi$ est donc que $b_1 = 0$. Réciproquement, si $b_1 = 0$, en posant $a_k = \dfrac{b_k}{1-k}$ pour $k \neq 1$ et $a_1 = 0$, on a bien $\varphi(P) = Q$. En conclusion, $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \{b_n X^n + \cdots + b_0 ; b_1 = 0\}}$.*

## Références