Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $E_m(X) = \binom{n}{m} X^m (1-X)^{n-m}$.
Exprimer la base $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base $(E_0, E_1, \dots, E_n)$.

Solution : *On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ X^m & \longmapsto & E_m^* \end{array} \right.$ avec $E_m^* = X^m(1-X)^{n-m} = (1-X)^n \left(\dfrac{X}{1-X}\right)^m$. Donc $\varphi(P) = (1-X)^n P\left(\dfrac{X}{1-X}\right) = Q(X)$.*

En posant $Y = \dfrac{X}{1-X}$, on a $X = \dfrac{Y}{1+Y}$ et donc $1 - X = \dfrac{1}{1+Y}$.

Comme $P\left(\dfrac{X}{1-X}\right) = \dfrac{1}{(1-X)^n} Q(X)$ on a $P(Y) = (1+Y)^n Q\left(\dfrac{Y}{1+Y}\right)$.

Les $(E_m^*)_{0 \leqslant m \leqslant n}$ forment une famille de E échelonnée en valuations. C'est donc une base de E. φ est une bijection, de bijection réciproque $\psi\, Q \longmapsto (1+X)^n Q\left(\dfrac{X}{1+X}\right)$.

On peut le vérifier directement :$\psi\left(E_m^*\right) = (1+X)^n \left(\dfrac{X}{1+X}\right)^m \left(1 - \dfrac{X}{1+X}\right)^{n-m} = X^m (1+X)^{n-m} \left(\dfrac{1}{1+X}\right)^{n-m} = X^m$.

Maintenant $\psi(X^k) = (1+X)^n \dfrac{X^k}{(1+X)^k} = X^k (1+X)^{n-k} = X^k \displaystyle\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} X^m = \sum_{p=k}^{n} \binom{n-k}{p-k} X^p = \sum_{p=k}^{n} \binom{n-k}{p-k} \psi\left(E_p^*\right)$.

Donc puisque ψ est bijective, $X^k = \displaystyle\sum_{p=k}^{n} \binom{n-k}{p-k} E_p^* = \sum_{p=k}^{n} \frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}} E_p = \sum_{p=k}^{n} \frac{\binom{p}{k}}{\binom{n}{k}} E_p$.

On peut le vérifier directement :
$$\sum_{p=k}^{n} \frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}} E_p = \sum_{p=k}^{n} \binom{n-k}{p-k} X^p (1-X)^{n-p} = \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} X^{m+k} (1-X)^{n-m-k} =$$

$$\boxed{X^k \sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} X^m (1-X)^{n-k-m} = X^k.}$$

Références