Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On pose $P_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. *Montrer que $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *Montrer que : $\forall l \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in]0, n[, \quad P_k(l) \in \mathbb{Z}$.*
3. *Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(i) \in \mathbb{Z}$.*

Solution :

1. *Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$. On reconnaît une famille étagée en degré, on en déduit que $\mathscr{P}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *Si $k = 1$, le résultat est évident. Supposons $k > 1$. Si $l \geqslant k$ alors : $P_k(l) = \dfrac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} = \boxed{\dbinom{l}{k}}$. Si $l \in [\![0, k-1]\!]$ on a $P_k(l) = \boxed{0}$ et enfin si $l < 0$, on a :*

$$\begin{aligned} P_k(l) &= \frac{-|l|(-|l|-1)\dots(-|l|-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{|l|(|l|+1)\dots(|l|+k-1)}{k!} \\ &= \boxed{(-1)^k \binom{|l|+k-1}{k}} \end{aligned}$$

   Dans chacun des trois cas, $P_k(l) \in \mathbb{Z}$.

3. *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant : $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(i) \in \mathbb{Z}$. Dans la base $\mathscr{P}$, P s'écrit : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$. Mais, $P(0) = a_0$ donc $a_0 \in \mathbb{Z}$. De même $P(1) = a_0 + a_1$ donc $a_1 \in \mathbb{Z}$.*

Supposons que $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons qu'il en est de même de a_{k+1}. On a :

$$\begin{aligned} P(k+1) = & \quad P_0(k+1) + a_1 P_1(k+1) + \cdots + a_k P_k(k+1) + a_{k+1} P_{k+1}(k+1) \\ = & \quad \underbrace{P_0(k+1) + a_1 P_1(k+1) + \cdots + a_k P_k(k+1)}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \end{aligned}$$

et comme $P(k+1) \in \mathbb{Z}$, il en est de même de a_{k+1}. On montre ainsi que tous les coefficients de P sont entiers. Réciproquement, un polynôme dont les coordonnées dans la base $\mathscr{P}$ sont entières est à valeurs entières sur les entiers. En résumé, l'ensemble recherché est $\boxed{\mathbb{Z}_n[X]}$.

Références