Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$, *on pose* $P_k = X^k (a - X)^{n-k}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Solution : *On propose deux démonstrations :*

1. *Soient* $\alpha, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (a - X)^{n-k} = 0$.
   - *En remplaçant* X *par* 0 *dans cette égalité, on trouve :* $\alpha_0 = 0$ *et celle-ci devient :* $\sum_{i=k}^{n} \alpha_k X^k (a - X)^{n-k} = 0$.
   - *Le terme de gauche de cette dernière égalité est un polynôme divisible par* X. *On a alors :* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^{k-1} (a - X)^{n-k} = 0$. *On recommence comme en 1., on montre que* $\alpha_1 = 0$.
   - *On répète* $n - 2$ *fois ces opérations et on montre que* $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

   On a ainsi montré que $\mathscr{P}$ *est libre. Comme cette famille est de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{C}_n[X]$, *on en déduit que c'est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.
2. *À partir de* $P_k(X) = X^{k-1} (a - X)^{n-k}$, *on définit* $\widetilde{P}_k(X) = X^n P_k(\frac{1}{X}) = (aX - 1)^{n-k}$. *Les* $(\widetilde{P}_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *forment une famille échelonnée en degrés, donc une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Références