Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, *on pose* $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *En étudiant la preuve de la question précédente, déterminer une condition suffisante pour qu'une famille* $(Q_0, \dots, Q_n)$ *de polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *En utilisant ce critère, montrer que la famille* $\mathscr{R} = (R_0, \dots, R_n)$ *où, pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $R_k = (X-a)^k + (X+a)^k$, $a \in \mathbb{R}$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. *En utilisant la formule du binôme, on calcule facilement que, pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i$. *On a en particulier* $\deg P_k = k$ *et on reconnaît une famille de* $\mathbb{R}_n[X]$ *étagée en degré. Donc elle est libre et comme son cardinal est égal à la dimension de* $\mathbb{R}_n[X]$, *elle forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *L'argument clé dans la démonstration précédente est que :* $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \deg P_k = k$. *Une famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant cette propriété forme toujours une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *Il est clair que pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg R_k = k$. *La famille* $\mathscr{R}$ *forme donc une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Références