Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à n.
Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Solution : *Il suffit de le vérifier pour une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$: X^m. En posant $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon, le membre de gauche égale*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_{k,m}}{(k+1)!} x^{k+1} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \\
&= \int_0^x P(t)\, dt
\end{aligned}$$

D'autre part le membre de droite égale

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)x^{n-k}}{(k+1)!} x^{k+1} \\
&= x^{m+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!(k+1)!} \\
&= x^{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(m+1)!}{(m-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k+1} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(1 - \underbrace{\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k}}_{=0} \right) \\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée. De plus on a

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1} = \int_0^x P(t)\, dt}.$$

Références