Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Programmer la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. *Que valent* u_{20}, u_{50}, u_{100} *?*
2. *Trouvez-vous les mêmes résultats que votre voisin ?*
3. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_1^n$.
4. *Les résultats sont ils en accord avec ceux des questions précédentes ? Pourquoi ?*

Solution :

1. *On trouve par exemple comme valeurs approchées* $u_{20} = -10^{-7}$, $u_{50} = -4 \times 10^{-7}$ *et* $u_{100} = -11892$.
2. *Pour des raisons qui apparaitront plus tard, il n'y a pas de raison de trouver la même chose pour* u_{100}*, sauf à travailler avec le même logiciel sur le même type de matériel.*
3. *Les deux suites* (u_n) *et* (u_1^n) *vérifient la même relation de récurrence d'ordre* 2 *et coïncident sur les deux premiers termes. Elles sont donc égales.*
4. *On a* $u_{100} = 10^{-27}$ *environ, à comparer avec* -11892 *trouvé précédemment. Nous sommes ici en présence d'un cas où les accumulations d'erreurs d'arrondis provoquent à coup sûr ce phénomène.*

   Les suites solutions de $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *sont de la forme* $ar_1^n + br_2^n$*, où* a *et* b *sont déterminés par les conditions initiales* u_0 *et* u_1*. Une petite erreur sur* u_0 *et* u_1 *entraîne une petite erreur sur* a *et* b*. Mais cette erreur sur* b *fait que* b *se retrouve non nul, ici en l'occurrence strictement négatif, au lieu d'être nul, et de ce fait, la suite programmée tend vers* $-\infty$*. De fait dès que l'on trouve deux termes consécutifs de la suite qui sont de même signe, la suite va tendre vers* $-\infty$ *(ou* $+\infty$*)*

Références