Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$ n formes linéaires sur E. Montrer que la famille $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si l'application $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

Solution :

- *Supposons que f est libre. Soit $x \in \operatorname{Ker} \theta$. Alors $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$. Par l'absurde, supposons que $x \neq 0$. Considérons un supplémentaire H à $\operatorname{Vect}(x)$ dans E et considérons la forme linéaire φ donnée par $\varphi_{|H} = 0$ et $\varphi(x) = 1$. Comme f est une base de $\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. Mais alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ et on aboutit à une absurdité. Donc $x = 0$ et $\operatorname{Ker} \theta = \{0\}$. Donc θ est injective. Comme $\dim \mathfrak{L}(E, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n$, θ est un isomorphisme.*
- *Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons que f est liée et montrons que θ n'est pas injective. Un des vecteurs de f peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à renuméroter les vecteurs de f, que ce soit le dernier. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i$. Si $x \in E$ alors*

$$\theta(x) = \left(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i(x) \right) \in Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$$

  où

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \varepsilon_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème place}}, 0, \dots, \lambda_i \right).$$

  On montre sans difficulté que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est libre donc $\dim Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = n - 1$. Alors $\dim \operatorname{Im} \theta \leqslant n - 1$ et θ n'est pas surjective donc n'est pas un isomorphisme.

Références