Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$ un endomorphisme. On suppose que $\forall \varphi \in E^\star$, $\varphi \circ u = 0_{E^\star}$. Montrer que $u = 0_{L(E)}$.

Solution : *Supposons que u ne soit pas nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $y_0 = u(x_0) \neq 0$. Posons $F = Vect(y_0)$ et considérons un supplémentaire G à F dans E. Ce dernier existe car E est de dimension finie. On sait que tout $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \alpha y_0 + x_G$ où $x_G \in G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On introduit l'application φ sur E définie par $\varphi(x) = \alpha$. On vérifie que φ est linéaire. Si $x = \alpha y_0 + x_G$ et si $x' = \alpha' y_0 + x'_G$ sont deux vecteurs de E alors par unicité de la décomposition d'un vecteur sur $E = F \oplus G$, pour $a, a' \in \mathbb{K}$, le vecteur $ax + a'x'$ se décompose sous la forme $ax + a'x' = (a\alpha + a'\alpha')\, y_0 + (ax_G + a'x'_G)$ et $\varphi(ax + a'x') = a\alpha + a'\alpha' = a\varphi(x) + a'\varphi(x')$. De plus, $\varphi(y_0) = 1$ donc φ n'est pas nulle et $\varphi(u(x_0))$ non plus. On aboutit alors à une contradiction et u est nulle.*

Références