Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Ker} \varphi$ et $Vect(x)$ sont supplémentaires dans E.

Solution : *Posons $F = \operatorname{Ker} \varphi + Vect(x)$. Comme $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - 1$, on a la disjonction : $\dim F = n - 1$ ou $\dim F = n$. Si $\dim F = n - 1$ alors $F = \operatorname{Ker} \varphi$ et forcément $x = 0$ ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc $\dim F = n$ et $\operatorname{Ker} \varphi + Vect(x) = E$. Si $u \in \operatorname{Ker} \varphi \cap Vect(x)$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha \cdot x$ et $0 = \varphi(u) = \alpha \varphi(x)$. Comme $x \in E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi(x) \neq 0$ et $\alpha = 0$ ce qui prouve que $u = 0$ et donc que $\operatorname{Ker} \varphi \cap Vect(x) = \{0\}$. $\operatorname{Ker} \varphi$ et $Vect(x)$ sont bien supplémentaires dans E.*

Références