Dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Dual d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et E^* le K-espace vectoriel des formes linéaires sur E, appelée dual de E. *Montrer que E et E' sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriel s isomorphes.*

Solution : *Considérons $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i^* la forme linéaire sur E définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. On va montrer que la famille $e^* = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E^* appelée* base duale de la base E.

- *La famille e^* est libre. En effet, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = \alpha_i = 0$.*
- *La famille e^* engendre E^*. Soit $\varphi \in E^*$. Posons $\alpha_i = \varphi(e_i)$. Alors, on vérifie que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$. En effet, si $x = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \alpha_i$. Mais on a aussi $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i$.*

Les $\mathbb{K}$-espace vectoriel s E et E^* sont alors de même dimension et donc isomorphes.

Références