Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1. *Il existe $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.*
2. *La dimension de E est paire.*

Solution :

— *Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. D'après la formule du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 \dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim E$ est bien pair.*

— *Réciproquement, si $\dim E = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ alors considérons une base $(e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n)$ de E ainsi que l'endomorphisme $f \in \mathfrak{L}(E)$ donné par : $\forall i \in [\![1, n]\!] f(e_i) = e'_i \quad \text{et} \quad f(e'_i) = 0$. On vérifie facilement que f est linéaire, que $\operatorname{Ker} f = Vect(e'_1, \dots, e'_n)$ et que $\operatorname{Im} f = Vect(e'_1, \dots, e'_n)$.*

Références