Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

1. *f peut-il être bijectif ?*
2. *Prouver que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ et que $\operatorname{rg} f \leqslant n-1$.*
3. *Soit q le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0$*
   - (a) *Montrer que :$\forall k \geqslant q, \quad f^k = 0$.*
   - (b) *Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.*
   - (c) *Montrer que : $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\right)$ est libre.*
   - (d) *En déduire que $q \leqslant n$ puis que $f^n = 0$.*
4. *On suppose dans cette question que $q = n$. Trouver tous les endomorphismes $g \in L(E)$ qui commutent avec f.*
   Indication 0.0 : On montrera que $g \circ f = f \circ g$ si et seulement si il existe $(a_0, \dots a_{n-1}) \in K^n$ tels que $g = a_0 \operatorname{id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Solution :

1. *Si f était bijective alors il en serait de même de f^p car ce serait une composée de fonctions bijectives. Or $f^p = 0$ qui n'est pas bijective donc f n'est pas bijective.*
2. *On a vu dans le cours que pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on a équivalence entre le fait que cet endomorphisme est bijectif, surjectif ou injectif. Comme f n'est pas bijective, elle n'est à la fois ni injective et ni surjective. Il vient alors :* $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ *et* $\operatorname{rg} f \leqslant n-1$.
3. - (a) *La composée de l'application nulle par une application quelconque est une application nulle !*
   - (b) *Comme q est le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0$, f^{q-1} n'est pas identiquement nul sur E : il existe donc $x_0 \in E$ tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0$.*

(c) *Soit* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1} \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0 \quad (\star).$$

Alors, par linéarité : $f^{q-1}\left(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0)\right) = 0$ *et :* $\alpha_0 f^{q-1}(x_0) + \alpha_1 f^q(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{2q-2}(x_0) = 0$ *mais comme :* $\forall k \geqslant q, \quad f^k = 0.$*, il vient* $\alpha_0 x_0 = 0$ *et donc :* $\alpha_0 = 0$*. L'égalité* $(\star)$ *devient alors :* $\alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x_0) = 0$*. En appliquant* f^{q-2} *à cette égalité, on montre de la même façon que* $\alpha_1 = 0$*. On répète encore* $n-2$ *fois ce procédé et on montre aussi que :* $\alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$*. La famille* $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{q-1}(x_0)\right)$ *est bien libre.*

(d) *Une famille libre de* E *est de cardinal au maximum la dimension de* E*. Donc* $q \leqslant n$*. D'après la question 3(a), il est alors clair que* $f^n = 0$*.*

4. *On suppose que* g *est un endomorphisme de* E *qui commute avec* f*. Comme* $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ *est une base de* E*, il existe* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ *tels que* $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$*. On calcule alors l'image par* g *des vecteurs de la base* $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ *:*

$$g\left(f^i(x_0)\right) = f^i(g(x_0)) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{i+k}(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k\right)\left(f^i(x_0)\right)$$

et on peut alors affirmer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$*. Réciproquement, si* g *est de cette forme, on vérifie facilement qu'elle commute avec* f*.*

Références