

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg} f + \text{rg} g$
2. $|\text{rg} f - \text{rg} g| \leq \text{rg}(f - g)$.

Solution :

1. On a

$$\text{rg}(f + g) = \dim \text{Im}(f + g) \leq \dim \text{Im} f + \dim \text{Im} g$$

car $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im} f + \text{Im} g$.

2. Par ailleurs

$$\text{rg} f = \text{rg}(f - g + g) \leq \text{rg}(f - g) + \text{rg} g$$

d'où $\text{rg} f - \text{rg} g \leq \text{rg}(f - g)$. On montre de même que $\text{rg} g - \text{rg} f \leq \text{rg}(g - f)$. Comme $\text{rg}(f - g) = \text{rg}(g - f)$, on en déduit l'inégalité.

Références