Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $P' + P = Q$.

Solution : *Soit* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' + P \end{array} \right.$. *On vérifie facilement que $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$. De plus φ est injective. En effet, si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $P + P' = 0$ et $\deg P = \deg P'$. Ceci n'est possible que si $P = 0$ et montre que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, on peut affirmer que φ est un automorphisme. On sait en effet d'après le cours qu'un endomorphisme injectif dans un espace de dimension finie est bijectif. Si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe alors un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = Q$, c'est-à-dire tel que $P + P' = Q$.*

Références