Polynômes interpolateurs de Lagrange

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Polynômes interpolateurs de Lagrange**

On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est un isomorphisme.*
2. *En déduire que si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0, n]$, $P(x_i) = y_i$ (polynôme interpolateur de Lagrange).*
3. *Soient deux réels distincts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant*

$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

Solution :

1. *On montre facilement que φ est linéaire. Si $P \in \operatorname{Ker} \varphi$ alors $P(x_0) = \cdots = P(x_n) = 0$. Donc P est de degré au plus n et admet $n+1$ racines. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc φ est injective. Comme $\dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, on en déduit, grâce à la formule du rang que $\dim \operatorname{Im} \varphi = n+1$ et donc φ est surjective. On prouve ainsi que φ est un isomorphisme.*
2. *Le résultat annoncé dans cette question découle directement de la définition d'une bijection.*
3. *On procède de même qu'avant. On considère l'application θ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{array} \right.$. On montre facilement qu'elle est linéaire. Soit $P \in \operatorname{Ker} \theta$. Alors a et b sont des racines doubles de P. Mais a et b sont distincts et P de degré au plus 3. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc $\operatorname{Ker} \theta = \{0\}$ et $\theta = 0$. On montre comme avant, en utilisant la formule du rang, que θ est surjective. Donc θ est un isomorphisme. En conséquence de quoi il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$.*

Références