Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathfrak{L}(E)$. Montrer que

$$(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u) \iff (u^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(u))$$

Solution : *Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$. Soit $x \in E$ alors $u(x) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ donc $u^2(x) = 0$ et $u^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = 2 \dim \operatorname{Im} u = 2\operatorname{rg}(u)$.*

Réciproquement, si $u^2 = 0$ et si $n = 2\operatorname{rg}(u)$ alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$. En effet, comme $u^2 = 0$, il est clair que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. La formule du rang amène $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$ et comme $n = 2\operatorname{rg}(u)$, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$. On en déduit le résultat.

Références