# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ***Pas de titre***

*Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :*

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-z, z-x, x-y) \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array} \right.$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+i\bar{z} \end{array} \right.$ *($\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)*

***Solution :***

1. *On calcule* $\operatorname{Ker} f$. *On sait que* $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ *si et seulement si* $\begin{cases} y-z & =0 \\ z-x & =0 \\ x-y=0 \end{cases}$. *On montre alors que* $x=y=z$ *et donc* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,1,1))$. *Le vecteur* $(1,1,1)$ *forme une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Im} f = 2$. *Une base de* $\operatorname{Im} f$ *est donc formée de deux vecteurs de* $\operatorname{Im} f$ *non colinéaires. Il suffit de prendre par exemple* $f(1,0,0) = (0,-1,1)$ *et* $f(0,1,0) = (1,0,-1)$.
2. *De même, on commence par déterminer* $\operatorname{Ker} f$. *Pour ce faire, on résout* $\begin{cases} 2x+y+z & =0 \\ x+y+t & =0 \\ x+z-t & =0 \end{cases}$. *On trouve* $y=-2x-z$ *et* $t=x+z$ *donc* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ *avec* $u_1 = (1,-2,0,1)$ *et* $u_2 = (0,-1,1,1)$ *qui sont non colinéaires. Une base de* $\operatorname{Ker} f$ *est formée de ces deux vecteurs. D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Im} f = 2$ *et il suffit de trouver deux vecteurs de* $\operatorname{Im} f$ *non colinéaires pour avoir une base de* $\operatorname{Im} f$. *On peut prendre* $f(1,0,0,0) = (2,1,1)$ *et* $f(0,1,0,0) = (1,1,0)$.
3. *On calcule le noyau de* $f$. *On trouve* $z = a+ib \in \operatorname{Ker} f \iff z+i\bar{z} = 0 \iff (a+b)(1+i) = 0 \iff a+b=0$. *Donc* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1-i)$ *et le vecteur* $1-i$ *forme une base de* $\operatorname{Ker} f$. *De même,* $\operatorname{Im} f = \{z+i\bar{z} \mid z \in \mathbb{C}\} = \{(a+b)(1+i) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(1+i)$ *et une base de* $\operatorname{Im} f$ *est* $1+i$.

## Références