Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n. On définit l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & Q \end{array} \right.$$

où Q est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, \mathrm{d}t$$

Montrez que f est un automorphisme de E.

Solution : *On vérifie d'abord que f est bien définie. Si $P \in E$, en utilisant la formule du binôme, on obtient que $\forall x \in E$,*

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\int_0^1 t^{n-k} P(t)\, \mathrm{d}t \right] x^k$$

ce qui montre que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.

Il est immédiat que f est linéaire. Montrons l'injectivité de f en vérifiant que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit $P \in E$ tel que $f(P) = 0$. D'après le calcul précédent,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \int_0^1 t^k P(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Comme $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, on obtient alors que

$$\int_0^1 P^2(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^k P(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Donc $\forall t \in [0,1]$, $P(t) = 0$, ce qui montre que le polynôme P a une infinité de racines et est donc nul.

Un endomorphisme injectif en dimension finie étant bijectif, f est un automorphisme de E.

Références