Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un K-espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$
2. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$
3. $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$
4. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
5. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Solution :

1. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ *Comme* $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, *en appliquant la formule de Grassmann puis la formule du rang,* $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f - \dim E = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. *Donc* $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. $\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ *Par définition.*
3. $\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ *Par la formule du rang.*
4. $\boxed{2) \Rightarrow 4)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ *tel que* $y = f(x)$. *Alors* $y = f(x_1) \in \operatorname{Im} f^2$ *car* $x_1 \in \operatorname{Im} f$. *Donc* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ *et on a bien* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
5. $\boxed{4) \Rightarrow 5)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. *On utilise la formule du rang :* $n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$. *Comme* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, *il vient que* $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. *Finalement,* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
6. $\boxed{5) \Rightarrow 4)}$ *se prouve de la même façon.*
7. $\boxed{5) \Rightarrow 3)}$ *Soit* $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ *alors* $f(x) = 0$ *et il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = f(x_0)$. *Donc* $f^2(x_0) = 0$ *et* $x_0 \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. *Alors* $x = f(x_0) = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
8. $\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ *C'est une conséquence directe de la formule de Grassmann.*

On vérifie que la chaine d'implications est bien fermée.

Références