

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère dans le plan euclidien un triangle isocèle (ABC) avec $AB = AC$. On considère un point D qui varie sur le segment $[AB]$ et un point E sur le segment $[BC]$ tels que $\overline{D'E} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ où D' est le projeté orthogonal de D sur (BC) . Par le point E , on mène la perpendiculaire à la droite (DE) . Montrer que cette droite passe par un point fixe I .

Solution : On choisit le repère orthonormé tel que $A \begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix}$, $B \begin{vmatrix} -b \\ 0 \end{vmatrix}$ et $C \begin{vmatrix} b \\ 0 \end{vmatrix}$. Notons $D' \begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \end{vmatrix}$, on a

alors $E \begin{vmatrix} \lambda + b \\ 0 \end{vmatrix}$. On détermine l'équation cartésienne de la droite (AB) : $ax - by + ab = 0$, les

coordonnées du point D : $D \begin{vmatrix} \lambda \\ \frac{a\lambda + ab}{2} \end{vmatrix}$ puis l'équation cartésienne de la perpendiculaire en E :

$-bx + \frac{a\lambda + ab}{b}y + b(\lambda + b) = 0$. On peut voir cette équation comme un polynôme en λ :

$$\lambda \left[b + \frac{ay}{b} \right] + [b(b - x) + ay] = 0$$

Il suffit d'annuler le coefficient de λ et le coefficient constant pour voir que cette droite passe toujours par le point $I \begin{vmatrix} 0 \\ -b^2/a \end{vmatrix}$.

Références