Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme $v \in \mathrm{GL}(E)$ et un projecteur $p \in L(E)$ tels que $u = v \circ p$.

Solution : *Si u est inversible, il suffit de prendre $v = u$ et $p = \mathrm{id}_E$. Sinon, notons $r = \dim \operatorname{Ker} u$. D'après la formule du rang, on a $n - r = \dim(\operatorname{Im} u)$. Considérons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\operatorname{Ker} u$ et complétons-la en une base $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E. Posons $f_{r+1} = u(e_{r+1}), \dots, f_n = u(e_n)$. On vérifie que cette famille est libre. Soient $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_{r+1} f_{r+1} + \dots + \alpha_n f_n = 0$ alors $u\left(\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n\right) = 0$ et $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n \in Vect\left(e_{r+1}, \dots, e_n\right) \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. Donc $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0$ mais comme $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est libre, $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$. On complète alors cette famille en une base $f = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ de E. Définissons alors p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ donné par $p\left(e_i\right) = 0$ si $i \in [\![1, r]\!]$ et $p\left(e_i\right) = e_i$ si $i \in [\![r+1, n]\!]$. Définissons aussi l'application linéaire v par $v(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme v envoie une base de E sur une base de E, v est inversible. On vérifie facilement en calculant l'image des vecteurs de la base e que $v \circ p = u$.*

Références